Analysis I: Grundlagen

Lösungen

1.(a) (i) Es existiert ein Viereck, das (gleichzeitig) ein Rechteck und ein Parallelogramm ist.

$\to$ wahr (jedes Rechteck ist ein Parallelogramm)

(ii) $\forall a \in P: a \notin Q$

$\to$ falsch (ein Quadrat ist auch Parallelogramm)

(b) (i) Es gibt mind. eine*n Studierende*n, der/die nicht blond ist.

(ii) $\exists x\ \forall y: x \geq y$

2.(a) Beh.: F.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Beweis:

IA: Für $n=1$ gilt: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = 1^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$. ✓

IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

IBeh.: Dann gilt: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n+1(n+2)}{2}\right)^2$.

IBeweis:

Es ist $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{IV}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$\overset{\text{Bin. F.}}{=} \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \qquad \square$$

(b) Beh.: Für reelle $a,b>0$ gilt: $2ab \leq a^2+b^2$ sowie $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$.

Beweis: Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a,b>0$ beliebig.

Es ist $(a-b)^2 \geq 0$. Mit binomischer Formel folgt:

$$(a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2-2ab+b^2 \geq 0 \quad | +2ab$$
$$a^2+b^2 \geq 2ab$$

Mit dieser letzten Ungleichung und der Tatsache, dass $a, b > 0$ sind, folgt:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad | : a \cdot b$$
$$\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \geq 2$$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Es folgt die Behauptung. $\square$

(c) Beh.: Wenn das Quadrat einer natürlichen Zahl gerade ist, so ist auch die Zahl selbst gerade.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Zudem sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $n^2 = 2k$ ist.

Angenommen, n ist nicht gerade. D.h., es existiert ein $p \in \mathbb{N}$ so, dass $n = 2p + 1$ ist.

Dann ist $n^2 = (2p+1)^2 \overset{2. \text{Bin. F.}}{=} (2p)^2 + 4p + 1$

$$= 4p^2 + 4p + 1 = 2\underbrace{(2p^2 + 2p)}_{=: m} + 1$$
$$= 2m + 1.$$

Dann ist $2k = n^2 = 2m + 1$. ↯

D.h., die Annahme muss falsch gewesen sein. Somit ist n auch gerade. $\square$

3.(a) $x^2 - 5 \leq 4x$

$x^2 - 4x - 5 \leq 0$

Wir suchen jetzt die Nullstellen von $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 + 5}$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3$

$x_1 = -1$; $x_2 = 5$

Die Funktion f beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel. D.h., die Funktionswerte sind rechts von x_1 und links von x_2 kleiner gleich 0.

$\Rightarrow L = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 5\}$

(b) $|2x - 13| = 4$

$$|2x-13| = \begin{cases} 2x-13 & \text{für } 2x-13 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{13}{2} \\ -(2x-13) & \text{für } 2x-13 < 0 \Rightarrow x < \frac{13}{2} \end{cases}$$

1\. Fall: $x \geq \frac{13}{2}$

$$2x - 13 = 4$$
$$2x = 17$$
$$x_1 = \frac{17}{2} \geq \frac{13}{2} \checkmark$$

2\. Fall: $x < \frac{13}{2}$

$$-(2x-13) = 4$$
$$-2x + 13 = 4$$
$$-2x = -9$$
$$x = \frac{9}{2} < \frac{13}{2} \checkmark$$

$\Rightarrow L = \{ \frac{9}{2} ; \frac{17}{2} \}$

4.(a) $M_1 = \{ x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 2x + 4 > 5 , x \geq 0 \}$

Die Elemente von M_1 können auch wie folgt beschrieben werden: F.a. $x \in M_1$ gilt:

$$3x^2 - 2x - 1 > 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$$

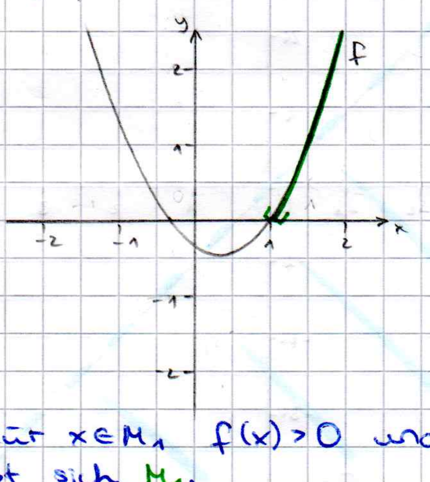
$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}_{=: f(x)} > 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$$

Wir können f auf Nullstellen untersuchen.

$$x_{1/2} = \frac{2}{6} \pm \sqrt{\frac{4}{36} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}}$$
$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{3}{9}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$$
$$= \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \quad ; \quad x_2 = 1$$

Wir wissen dann, dass der Graph von f wie folgt aussieht:



Nun soll für $x \in M_1$ $f(x) > 0$ und $x \geq 0$ sein. Damit ergibt sich M_1.

Wir sehen nun, dass M_1 nach oben unbeschränkt ist. Es existieren also weder ein Supremum noch ein Maximum.
Allerdings ist M_1 nach unten beschränkt: f.a. $x \in M_1$ gilt: $x \geq 1$. Somit ist $1 = \inf(M_1)$. Es ist gleichzeitig ein Minimum, da $1 \in M_1$ ist.

(b) $M_2 = \{ \frac{m \cdot n}{m^2+n^2} : m, n \in \mathbb{N} \}$

Da $m, n \in \mathbb{N}$ sind, ist 1 die kleinste für beide einsetzbare Zahl: $x = \frac{1 \cdot 1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} \in M_2$.

Wenn $m, n > 1$ sind, dann gilt $m^2+n^2 \overset{\text{Bin. F.}}{\geq} 2mn > 2$ & $m^2+n^2 > 2mn > mn$.
Somit ist jedes x ein echter Bruch (also zwischen 0 & 1) und für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq \frac{1}{2}$.

Somit ist M_2 nach Def. nach oben beschränkt.
$\frac{1}{2}$ ist auch die kleinste obere Schranke, also gilt: $\frac{1}{2} = \sup(M_2)$.
Außerdem gilt (wie oben gezeigt): $\frac{1}{2} \in M_2$. Somit ist $\frac{1}{2} = \max(M_2)$.

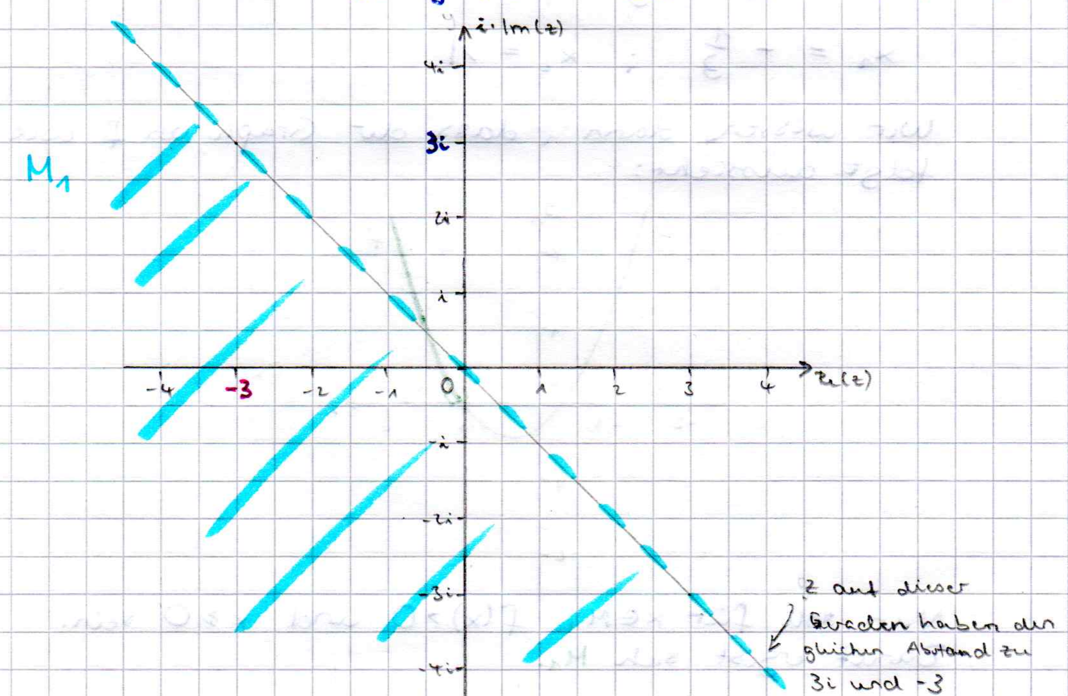
Mit $m, n \in \mathbb{N}$ ist $m \cdot n \in \mathbb{N}$ und somit $m \cdot n \neq 0$, da $0 \notin \mathbb{N}$ ist.

$\Rightarrow \forall x \in M_2 : x > 0$
$\Rightarrow M_2$ ist nach unten beschränkt.

0 ist auch größte untere Schranke, also gilt: $0 = \inf(M_2)$.
Aber $0 \neq \min(M_2)$, da $0 \notin M_2$ (wie oben begründet).

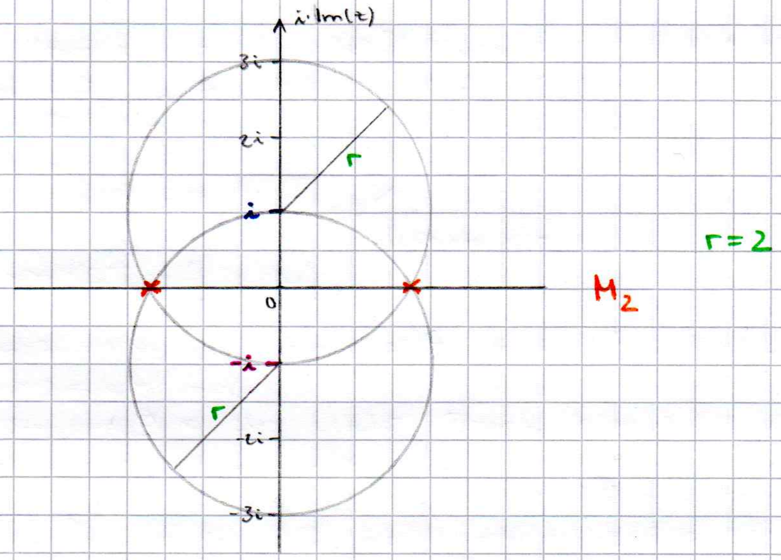
LA 5. (a) $M_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 3i| > |\underbrace{z+3}_{-(-3)}| \}$

In Worten: in M_1 liegen die $z \in \mathbb{C}$, deren Abstand zu $3i$ größer ist als der Abstand zu -3.



(b) $M_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2 = |z \underbrace{+i}_{=-(-i)}| \}$

In Worten: in M_2 liegen alle $z \in \mathbb{C}$, die den gleichen Abstand zu i und $-i$ haben, nämlich 2.



Lösungen Folgen

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Grenzwerte:

- $a_n = \dfrac{6n^3+1}{n^3-n+6} = \dfrac{n^3}{n^3} \cdot \dfrac{6+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^3}} \longrightarrow 6$ für $n \longrightarrow \infty$

- $b_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n(n+1)} - n = \dfrac{(\sqrt{n(n+1)}-n)(\sqrt{n(n+1)}+n)}{(\sqrt{n(n+1)}+n)} = \dfrac{n^2+n-n^2}{(\sqrt{n(n+1)}+n)} = \dfrac{n}{n} \cdot \dfrac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ für $n \longrightarrow \infty$

- $c_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2})^k}{\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{3})^k} = \dfrac{\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}} \longrightarrow \dfrac{\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}} = \dfrac{4}{3}$ für $n \longrightarrow \infty$

- $d_n = \sqrt[n]{4+\dfrac{n-1}{n+1}}$. Es gilt die Abschätzung $1 \leq d_n \leq \sqrt[n]{5}$, daher folgt mit dem Einschließungslemma $d_n \longrightarrow 1$ für $n \longrightarrow \infty$.

2. Aufgabe:

Häufungswerte:

$$a_n = \frac{1+(-7)^n}{7^n} = \begin{cases} \dfrac{1+7^n}{7^n} & \text{für gerade } n \\ \dfrac{1-7^n}{7^n} & \text{für ungerade } n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{für gerade } n \\ -1 & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

für $n \longrightarrow \infty$.

Für $b_n = i^n$ betrachte zunächst $N = 1,2,3,4$. $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ und

$i^4 = -i \cdot i = 1$. Daher folgt

$$i^n \longrightarrow \begin{cases} i & \text{für } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -1 & \text{für } n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -i & \text{für } n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 1 & \text{für } n = 4k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

für $n \longrightarrow \infty$.

$$c_n = (-1)^n \frac{n^2}{(2n+3)^2} = (-1)^n \frac{n^2}{4n^2+12n+9} = (-1)^n \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{4 + \frac{12}{n} + \frac{9}{n^2}} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für gerade n} \\ -\frac{1}{4} & \text{für ungerade n} \end{cases}$$

für $n \longrightarrow \infty$.

3. Aufgabe:

Beschränktheit: Zeige mittels vollst. Induktion, dass $a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. I.A. $a_1 = 1 < 2$

I.V. $a_n < 2$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$

I.B. $a_{n+1} < 2$

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1 \overset{I.V.}{<} \frac{1}{4}2^2 + 1 = 2$$

Montonie: zu zeigen: $a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}a_n^2 + 1 - a_n = (\frac{1}{2}a_n - 1)^2 > 0$$

Grenzwert: (sei hier a)

$$a = \frac{1}{4}a^2 + 1 \Leftrightarrow (\frac{1}{2}a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

4. Aufgabe:

Für alle $0 < \varepsilon < 1$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon} - 5}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n > N \in \mathbb{N}$ gilt.

$$|a_n - 1| = |\frac{n^2}{n^2+5} - 1| = |\frac{n^2 - n^2 - 5}{n^2+5}| = \frac{5}{n^2+5} < \frac{5}{(\sqrt{\frac{5}{\varepsilon} - 5})^2 + 5} = \frac{5}{\frac{5}{\varepsilon} - 5 + 5} = \varepsilon$$

5. Aufgabe:

Wahr oder Falsch?

☑ Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. *Wahr*

☒ Jede Nullfolge ist monoton fallend. *Falsch z.B.* $(-1)^n\frac{1}{n}$

☒ Jede Folge bestitzt mindestens einen Häufungspunkt. *Falsch, der Satz von Bolzano-Weierstrass sagt nur, dass jede beschränkte Folge mind. einen Häufungspunkt hat. Betrachte z.B.* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$

☑ Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. *Wahr. Sei die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n \longrightarrow a$ *gegeben. Dann gilt* $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, *sodass* $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > N$. *Daher gilt auch* $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall n, m > N$, *das ist genau das Cauchykriterium.*

6. Aufgabe:

Voraussetzung: $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n > n_0$ ($\Leftrightarrow a_n \longrightarrow a$ für $n \longrightarrow \infty$)

Behauptung: $|a_n| \longrightarrow |a|$ für $n \longrightarrow \infty$

Beweis:

$$||a_n| - |a|| \overset{Dreiecks-Ungl.}{\leq} |a_n - a| \overset{Vorr.}{<} \varepsilon$$

Reihen

1. Aufgabe:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge welche für alle $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $a_n \geq 0$ erfüllt. Beweisen Sie die folgende Aussage: Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Proof. Aus der Voraussetzung, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, folgt mit dem notwendigen Kriterium für Reihenkonvergenz, dass $a_n \to 0$ gilt. Folglich existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n \leq 1$ für alle $n \geq N$ gilt. Somit gilt für $n \geq N$ die Ungleichung $a_n^2 \leq a_n$. Insgesamt gilt also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ konvergiert nach Voraussetzung. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ nach dem Majorantenkriterium. □

2. Aufgabe:

Untersuchen sie für welche Werte $p \in \mathbb{R}$ mit $p > 0$ die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5p-4}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{p}\right)^n$$

jeweils konvergieren beziehungsweise divergieren.

Proof. Die Reihen konvergieren, wenn einerseits $5p - 4 > 1$ und andererseits $p > 2$ gilt. Somit ergeben sich drei Fälle.

Fall 1: $p > 2$: Beide Reihen konvergieren.
Fall 2: $1 < p \leq 2$: Die erste Reihe konvergiert, die zweite Reihe divergiert.
Fall 3: $0 \leq p \leq 1$: Beide Reihen divergieren. □

3. Aufgabe:

Wahr oder Falsch? Beweisen Sie jeweils Ihre Aussage.

w) Sei $c > 0$ eine Konstante so, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c^n$ konvergiert. Dann muss auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-c)^n$ konvergieren.

Proof. Da die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c^n$ konvergiert muss c^n eine Nullfolge sein. Ferner ist c^n monoton fallend. Somit ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-c)^n$ konvergent nach dem Leibniz-Kriterium. □

f) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Falls $\lim_{n\to\infty} 2a_n = 0$ gilt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Proof. Definiere $a_n := \frac{1}{n}$. Dann gilt mit den Grenzwertsätzen $\lim_{n\to\infty} 2a_n = 2\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, jedoch ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergent, da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Die Aussage ist demnach falsch. $\square$

f) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konvergent.

Proof. Definiere $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$. Dann gilt nach den Grenzwertsätzen, da $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 1 beschränkt ist:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Allerdings gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Demnach divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, da die harmonische Reihe divergiert. Die Aussage ist also im Allgemeinen falsch. $\square$

w) Die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3p-3}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n$$

konvergieren, falls $p = \frac{5}{3}$ ist.

Proof. Die Reihen konvergieren, wenn einerseits $3p - 3 > 1$ und $p > 1$ gelten. Die Zahl $p = \frac{5}{3}$ erfüllt beide Bedingungen. $\square$

f) Sei $c > 0$ eine Konstante so, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ konvergiert. Dann gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (c^2)^n$$

Proof. Diese Aussage ist falsch. Wähle $c = \frac{1}{2}$. Dann konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ als geometrische Reihe. Allerdings ist $c^2 = \frac{1}{4}$ und mit der Formel für die geometrische Reihe folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c^2)^n = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \neq 4 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right).$$

$\square$

4. Aufgabe:

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

  Proof. Konvergent, da $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ und $\frac{3}{2} > 1$. □

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-3}}$

  Proof. Wir haben für $n \geq 2$ mit der Monotonie der Wurzelfunktion

  $$n^2 \leq n^2 \implies n^2 - 3 \leq n^2 \implies \sqrt{n^2-3} \leq n \implies \frac{1}{\sqrt{n^2-3}} \geq \frac{1}{n}.$$

  Somit gilt

  $$\frac{1}{\sqrt{n^2-3}} \geq \frac{1}{n} \implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-3}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

  Damit divergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-3}}$ nach dem Minorantenkriterium. □

- $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n}{n+3}$

  Proof. Die Folge $\frac{2n}{n+3}$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen 2, ist somit keine Nullfolge und die Reihe divergiert nach der notwendigen Bedingung für Reihen. □

- $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-3}}$

  Proof. Aus der Monotonie der Wurzelfunktion folgt

  $$n + 1 - 3 > n - 3 \implies \sqrt{n-2} > \sqrt{n-3}.$$

  Division liefert

  $$\frac{1}{\sqrt{n-3}} > \frac{1}{\sqrt{n-2}}.$$

  Somit ist die Folge $a_n = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$ eine monoton fallende Nullfolge und nach dem Leibniz-Kriterium ist damit die Reihe $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-3}}$ konvergent. □

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$

Proof. Da $|\sin n| \leq 1$ gilt, erhalten wir

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt daraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$, da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. □

5. Aufgabe:

Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} x^n$ auf ihr Konvergenzverhalten.

Proof. Es gilt

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n3^n}\right|}} = 3,$$

da $\sqrt[n]{n} \to 1$ erfüllt ist. Für $x = -3$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

womit die Reihe für $x = -3$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Für $x = 3$ folgt hingegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

womit die Reihe für $x = 3$ divergiert. Somit konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$ für $x \in [-3, 3)$.

Wir untersuchen den Term

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n!}{n^2}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{(\sqrt[n]{n})^2}}.$$

Wie oben wissen wir, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ gilt. Somit erhalten wir

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n!}{n^2}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}}.$$

Da $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ gilt, folgt

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n!}{n^2}\right|}} = 0.$$

Somit konvergiert die Potenzreihe für kein $x \in \mathbb{R}$. □

6. Aufgabe:

Die Reihen $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ konvergieren. Bestimme Sie die jeweiligen Werte.

Tipp: Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$$

gilt.

Proof. Für die erste Reihe machen wir Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt

$$\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{2(m+1)}$$

gilt.

Induktionsschritt: Mit der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\sum_{k=2}^{m+1} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{(m+1)^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{(m+1)^2-1}.$$

Ferner erhalten wir

$$\frac{1}{(m+1)^2-1} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{m(m+2)} - \frac{1}{2m} = \frac{2}{2m(m+2)} - \frac{m+2}{2m(m+2)}$$

$$= -\frac{m}{2m(m+2)} = -\frac{1}{2(m+2)}.$$

Dies können wir nun einsetzen und erhalten:

$$\sum_{k=2}^{m+1} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{(m+1)^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(m+1)} - \frac{1}{2(m+2)}.$$

Somit haben wir unsere Behauptung mittels Induktion gezeigt.

Nun zur zweiten Reihe: Es gilt mit $k = n - 1$, also $n = k + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{k+1=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}.$$

Mit der geometrischen Reihe folgt nun, da $\frac{1}{3} < 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

□

7. Aufgabe:

Zusatzaufgabe. Achtung schwierig!

Untersuchen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ auf ihr Konvergenzverhalten. Bestimmen Sie den Reihenwert.

Proof. Wir werden beweisen, dass

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n}{e^n} = \frac{e^{m+1} + m(1-e) - e}{e^m(e-1)^2}$$

gilt. Das machen wir mit natürlicher Induktion über m.

Induktionsanfang: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{1} \frac{n}{e^n} = \frac{1}{e} = \frac{(e-1)^2}{e(e-1)^2} = \frac{e^2 - 2e + 1}{e(e-1)^2}.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{n}{e^n} = \frac{e^{k+1} + k(1-e) - e}{e^k(e-1)^2}$$

gilt.

Induktionsschritt: Es gilt mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{n=1}^{k+1} \frac{n}{e^n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{e^n} + \frac{k+1}{e^{k+1}} = \frac{e^{k+1} + k(1-e) - e}{e^k(e-1)^2} + \frac{k+1}{e^{k+1}}.$$

Wir fassen zusammen:

$$\frac{e^{k+2} + ke(1-e) - e^2}{e^{k+1}(e-1)^2} + \frac{(k+1)(e-1)^2}{e^{k+1}(e-1)^2} = \frac{e^{k+2} + ke(1-e) - e^2 + (k+1)(e-1)^2}{e^{k+1}(e-1)^2}$$

$$= \frac{e^{k+2} + k(1-e) - 2e + 1}{e^{k+1}(e-1)^2} = \frac{e^{k+2} + (k+1)(1-e) - e}{e^{k+1}(e-1)^2}.$$

Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Nun können wir in der Partialsummendarstellung zur Grenze übergehen und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{n}{e^n} = \lim_{m\to\infty} \frac{e^{m+1} + m(1-e) - e}{e^m(e-1)^2} = \frac{e}{(e-1)^2}.$$

Damit konvergiert die Reihe mit dem Wert $\frac{e}{(e-1)^2}$. $\square$

Funktionen

1. Aufgabe:

Überprüfe folgende Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivtät.

a) $f : \mathbb{R} \to [5, \infty)$ mit $f(x) = x^4 + 5$.

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^4 + 5$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot \cos(x)$.

d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = \frac{3x+11}{7}$.

e) $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{falls } x \text{ gerade,} \\ \frac{x+1}{2} & \text{falls } x \text{ ungerade.} \end{cases}$

1. Beweis:

a) Es ist $f(1) = 6 = f(-1)$ und somit f nicht injektiv und insbesondere nicht bijektiv.
Sei weiter $y \in [5, \infty)$ beliebig, dann gilt ist $x_0 := \sqrt[4]{y-5} \in \mathbb{R}$, weil $y \geq 5$ und somit $y - 5 \geq 0$ ist. Weiter ist dann $f(x_0) = y$ und somit f surjektiv.

b) Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $f(a) = f(b)$, dann ist $a^4 + 5 = b^4 + 5$ und somit $a^4 = b^4$. Da $a, b \geq 0$ sind, folgt damit $a = b$ und somit ist f injektiv.
Allerdings ist die Funktion nicht surjektiv, da es kein $x \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $x^4 = -5$ ist, also gibt es auch kein x so, dass $f(x) = 0$ ist. Also ist die Funktion auch nicht bijektiv.

c) Es ist $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0 = -\frac{\pi}{2} \cdot 0 = f(-\frac{\pi}{2})$. Also ist die Funktion nicht injektiv.
Bei der Surjektivität muss man ein wenig tricksen. Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig, dann wissen wir, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $y \in [-2k\pi, 2k\pi]$ ist. Nun gilt $f(-2k\pi) = -2k\pi$ sowie $f(2k\pi) = 2k\pi$. Da f ein Produkt von stetigen Funktionen ist, ist f ebenfalls stetig. Mit dem Zwischenwertsatz nimmt f dann auch jeden Wert im Intervall $[-2k\pi, 2k\pi]$ an. Da $y \in [-2k\pi, 2k\pi]$ gilt, nimmt f auch den Wert y an, also ist die Funktion surjektiv.

d) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $f(a) = f(b)$, dann gilt $\frac{3a+11}{7} = \frac{3b+11}{7} \Leftrightarrow 3a + 11 = 3b + 11 \Leftrightarrow 3a = 3b \Leftrightarrow a = b$ und somit ist f injektiv.
Sei weiter $q \in \mathbb{Q}$ beliebig, dann existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ so, dass $q = \frac{a}{b}$ ist. Nun ist $x_0 := \frac{7a-11b}{3b} \in \mathbb{Q}$ und es gilt $f(x_0) = \frac{1}{7} \cdot (3\frac{7a-11b}{3b} + 11) = \frac{1}{7} \cdot (\frac{7a-11b}{b} + \frac{11b}{b}) = \frac{1}{7} \cdot (\frac{7a}{b}) = \frac{a}{b} = q$. Also ist die Funktion auch surjektiv und somit bijektiv.

e) Seien $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $f(a) = f(b)$, dann gibt es drei Fälle. Fall 1 ist, dass a und b beide gerade sind, dann ist $-\frac{a}{2} = -\frac{b}{2}$ und daraus folgt durch Umformen, dass $a = b$ ist. Fall 2 ist, dass a und b beide ungerade sind, also ist $\frac{a+1}{2} = \frac{b+1}{2}$ und daraus folgt, dass $a = b$ ist. Im letzten Fall ist ein Element gerade und eines ungerade, o.B.d.A sei a gerade und b ungerade. Dann gilt $-\frac{a}{2} = \frac{b+1}{2} \Leftrightarrow -a = b + 1$, dies ist allerdings ein Widerspruch, da $-a \leq 0$ ist und $b + 1 \geq 2$ aufgrund des Definitionsbereichs. Somit kann $f(a) = f(b)$ nur gelten, wenn a und b beide gerade oder ungerade sind. Insgesamt ist die Funktion injektiv.
Sei $y \in \mathbb{Z}$ mit $y \leq 0$ beliebig, dann ist $x_0 := -2y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und gerade, somit gilt $f(x_0) = -\frac{x_0}{2} = \frac{2y}{2} = y$. Sei nun $y \in \mathbb{Z}$ mit $y > 0$ beliebig, dann ist $x_0 := 2y - 1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und ungerade, somit ist $f(x_0) = \frac{x_0+1}{2} = \frac{2y}{2} = y$. Also ist die Funktion auch surjektiv und somit bijektiv.

2. Aufgabe:

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} x^a \cdot \cos(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Für welche $a \geq 0$ ist f stetig an der Stelle $x = 0$?

2. Beweis:
Für $a > 0$ gilt

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = \lim_{x \to 0} |x^a \cdot \cos(\frac{1}{x})| \leq \lim_{x \to 0} |x^a| \cdot 1 = 0.$$

Es folgt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Also ist f an der Stelle $x = 0$ stetig für alle $a > 0$.

Sei nun $a = 0$. Dann ist $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei weiter $x_k := \frac{1}{2k\pi}$ und $\tilde{x}_k := \frac{1}{(2k+1)\pi}$.
Nun gilt $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0 = \lim\limits_{k \to \infty} \tilde{x}_k$ und es ist

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{k \to \infty} f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \lim_{k \to \infty} \cos(2k\pi) = 1 \text{ und}$$
$$\lim_{k \to \infty} f(\tilde{x}_k) = \lim_{k \to \infty} f\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) = \lim_{k \to \infty} \cos((2k+1)\pi) = -1 \neq \lim_{k \to \infty} f(x_k).$$

Somit existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht und die Funktion ist insbesondere nicht stetig an der Stelle $x = 0$, wenn $a = 0$ ist.

Bemerkung: Nachdem wir $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = 1 \neq f(0)$ gezeigt haben, hätten wir eigentlich aufhören können. Denn damit kann schon nicht mehr $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ gelten, was für Stetigkeit von f in $x = 0$ nötig wäre. Nun kann man sich fragen, ob man die Definition von f an der Stelle $x = 0$ so verändern kann, dass f für den Fall $a = 1$ doch in $x = 0$ stetig ist. Durch unsere Betrachtungen haben wir aber zusätzlich gezeigt, dass auch das nicht möglich ist.

3. Aufgabe:

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot \beta > 0$. Beweise, dass ein $x_0 \in [a, b]$ existiert so, dass gilt

$$f(x_0) = \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta}.$$

3. Beweis:
Die Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz, wenn wir zeigen, dass $\frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt. Dazu sind die Fälle $f(a) \leq f(b)$ und $f(a) \geq f(b)$ sowie $\alpha, \beta > 0$ und $\alpha, \beta < 0$ zu unterscheiden. O.B.d.A gelte hier $f(a) \leq f(b)$ und $\alpha, \beta < 0$.
Hierfür gilt:

$$\begin{aligned} f(a) \leq f(b) &\Rightarrow \beta f(a) \geq \beta f(b) \\ &\Rightarrow (\alpha + \beta) f(a) \geq \alpha f(a) + \beta f(b) \\ &\Rightarrow f(a) \leq \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(a) \leq f(b) &\Rightarrow \alpha f(a) \geq \alpha f(b) \\ &\Rightarrow (\alpha+\beta) f(b) \leq \alpha f(a) + \beta f(b) \\ &\Rightarrow f(b) \geq \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

4. Aufgabe :
(Nur BA)
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Beweise, dass f dann auch beschränkt auf (a, b) ist.

4. Beweis :
Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es zu $\varepsilon = 1 > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$x, y \in (a, b),\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1.$$

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{n} < \delta$. Dann gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein $j \in \{1, ..., n-1\}$ mit

$$\left| a + \frac{j}{n}(b-a) - x \right| < \delta,$$

und daher folgt

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(a + \frac{j}{n}(b-a)) + f(a + \frac{j}{n}(b-a))| \\ &\leq |f(x) - f(a + \frac{j}{n}(b-a))| + |f(a + \frac{j}{n}(b-a))| \\ &< 1 + \max_{k \in \{1,\ldots,n-1\}} |f(a + \frac{k}{n}(b-a))|. \end{aligned}$$

5. Aufgabe :
(Nur BA)
Bestimme die Grenzfunktion der folgenden Funktionenfolgen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ und untersuche, ob die Konvergenz auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig ist.

a) $f_n(x) = \arctan(nx)$.

b) $f_n(x) = \frac{n \sin(x)}{n + \cos(x)}$ $(n \geq 2)$.

5. Beweis :

a) Für ein festes $x > 0$ gilt $nx \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \frac{\pi}{2}.$$

Analog erhält man für $x < 0$

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = -\frac{\pi}{2}.$$

Für $x = 0$ erhält man $f_n(x) = \arctan(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Damit konvergiert die Folge punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}.$$

Diese Funktion ist offensichtlich nicht stetig in $x = 0$. Da aber jedes f_n stetig ist, kann die Folge nicht gleichmäß konvergieren, sonst wäre die Grenzfunktion ebenfalls stetig.

b) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(x)}{n+\cos(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x)}{1+\frac{\cos(x)}{n}} = \frac{\sin(x)}{1+0} = \sin(x).$$

Wir zeigen nun, dass f_n sogar gleichmäßig gegen $f(x) = \sin(x)$ konvergiert. Dazu seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ beliebig.

Wir setzen zur Abkürzung $a := \frac{\cos(x)}{n}$. Wegen $\cos(x) \geq -1$ und $n \geq 2$ ist $a \geq -\frac{1}{2}$ und damit $1 + a \geq \frac{1}{2}$. Insgesamt erhalten wir $\left|\frac{1}{1+a}\right| = \frac{1}{1+a} \leq 2$.

Nun gilt

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|\sin(x) - \frac{n\sin(x)}{n+\cos(x)}\right| = |\sin(x)| \cdot \left|1 - \frac{n}{n+\cos(x)}\right| \\
&\leq 1 \cdot \left|1 - \frac{1}{1+\frac{\cos(x)}{n}}\right| = \left|1 - \frac{1}{1+a}\right| \\
&= \left|\frac{a}{1+a}\right| = |a| \cdot \left|\frac{1}{1+a}\right| \\
&\leq |a| \cdot 2 = 2 \cdot \left|\frac{\cos(x)}{n}\right| \leq \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

Da dies für alle x gleichzeitig gilt, konvergiert f_n gleichmäßig geben f.

6. Aufgabe:
(Nur LAG)

Bestimme alle Extremstellen der folgenden Funktionen. Gib jeweils an, an welchen Stellen es sich um Hoch- und an welchen um Tiefpunkte handelt. Was müsste man noch überprüfen, um herauszufinden, ob es sich um ein lokales oder globales Extremum handelt?

a) $f(x) = -e^{-x+2}(x^2 - 15)$

b) $g(x) = (-4 + x)x + (-2 + x)\cos(x) - \sin(x)$

6. Beweis:

a) $f'(x) = e^{-x+2}(x^2 - 2x - 15)$. Eine notwendige Bedingung für Extremstellen ist, dass die erste Ableitung dort Null ist, also setzen wir $f'(x) = 0$. Da es sich um ein Produkt von zwei Funktionen handelt, kann f' genau dann Null werden, wenn einer der Faktoren Null wird. e^{-x+2} kann nicht Null werden, also setzen wir $x^2 - 2x - 15 = 0$ und erhalten (mit p-q-Formel oder ähnlichem) als Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 5$.
Um zu überprüfen, ob es sich um Hoch- oder Tiefpunkte handelt, betrachten wir die 2. Ableitung der Funktion und setzen unsere Extremstellen ein. $f''(x) = e^{-x+2}(-x^2 + 4x + 13)$, also ist $f''(-3) = -8e^{-1} < 0$ und $f(5) = 8e^3 > 0$. Somit haben wir bei x_1 einen Hochpunkt und bei x_2 einen Tiefpunkt. Um zu überprüfen, ob es sich um lokale oder globale Extrema handelt, müssen wir die Grenzwerte der Funktion für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ betrachten.

b) $g'(x) = (2 - \sin(x))(x - 2)$. Da $\sin(x) \leq 1$ gilt, kann wieder nur der zweite Faktor Null werden und zwar genau für $x = 2$.
Die zweite Ableitung liefert uns $f''(x) = 2 - (-2 + x)\cos(x) - \sin(x)$. Setzen wir $x = 2$ ein, erhalten wir $f''(2) = 2 - (-2 + 2)\cos(2) - \sin(2) = 2 + \sin(2) > 0$. Also haben wir einen Tiefpunkt gefunden. Da dies die einzige Extremstelle ist, ist der Punkt sogar ein globaler Hochpunkt.